9.1.3 Základní kombinatorická pravidla III

Předpoklady: 9102

Pedagogická poznámka: V případě časového skluzu je možné tuto hodinu přeskočit.

Př. 1: Urči počet trojciferných čísel s různými ciframi.

1. cifra: 9 možností (vše kromě nuly),
2. cifra: 9 možností (vše kromě číslice na prvním místě),
3. cifra: 8 možností (vše kromě číslic na prvním a na druhém místě),

$\Rightarrow$ celkem $9\cdot9\cdot8=648$ možností.

Pedagogická poznámka: Kromě správného řešení se objevuje špatné řešení $8\cdot9\cdot10$ sestavované odzadu (od poslední cifry).

Př. 2: Spočti počet trojciferných čísel s různými ciframi „sestavováním odzadu“ (tím, že začneme hledat nejdříve poslední cifru). Využij kombinatorické pravidlo součtu.

Problém špatného výrazu $8\cdot9\cdot10$ - při sestavování odzadu (zprava doleva) na první místo umisťujeme 8 číslic, tedy nevyřadili jsme 0 z prvního místa, protože nevíme, zda jsme ji již použili u předchozích cifer nebo ne.

Při sestavování odzadu musíme sledovat, zda jsme již použili nulu $\Rightarrow$ číslo můžeme sestavit třemi způsoby:

0 je třetí cifrou: $\Rightarrow$ možnosti:

3. cifra: 1 možnost (nula),
2. cifra: 9 možností (vše kromě nuly),
1. cifra: 8 možností (vše kromě nuly a číslice na druhém místě),

$\Rightarrow$ celkem: $8\cdot9\cdot1$ možností.

0 je druhou cifrou: $\Rightarrow$ možnosti:

3. cifra: 9 možností (vše kromě nuly),
2. cifra: 1 možnost (nula),
1. cifra: 8 možností (vše kromě nuly a číslice na třetím místě),

$\Rightarrow$ celkem: $8\cdot1\cdot9$ možností.

0 není ani třetí ani druhou cifrou ($\Rightarrow$ číslo ji neobsahuje)

3. cifra: 9 možností (vše kromě nuly),
2. cifra: 8 možností (vše kromě nuly a číslice na třetím místě),
1. cifra: 7 možností (vše kromě nuly a číslic na třetím a druhém místě),

$\Rightarrow$ celkem: $7\cdot8\cdot9$ možností.

Celkově možností: $8\cdot9\cdot1+8\cdot1\cdot9+7\cdot8\cdot9=648$.

Pedagogická poznámka: V následujícím příkladu se velká část žáků pokusí sestavovat čísla odzadu (jako v předchozím příkladu), což vede k nesprávnému výsledku $7\cdot8\cdot9+6\cdot8\cdot9$. Je dobré na chybu poměrně brzy upozornit.

Př. 3: Urči počet všech čtyřciferných čísel sestavených z různých cifer a dělitelných pěti.

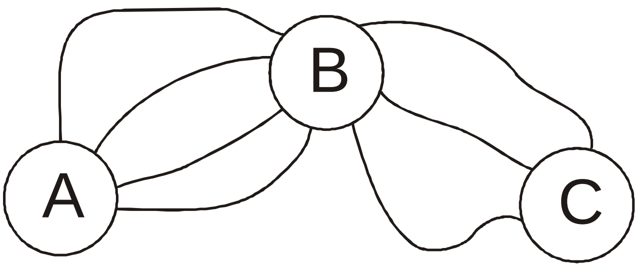
Číslo je dělitelné pěti, právě když končí na 5 nebo 0 $\Rightarrow$ problém: nulu musíme řešit, když zkoumáme číslo na první cifře $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dvě části.
Číslo končí nulou:
1. cifra: 9 možností (nemůžeme použít nulu, která je na čtvrtém místě),
2. cifra: 8 možností (bez první číslice a nuly),
3. cifra: 7 možností (bez první číslice, druhé číslice a nuly),
4. cifra: 1 možnost (nula),
$\Rightarrow$ celkem $9 \cdot 8 \cdot 7$ možností.
Číslo končí pětkou:
1. cifra: 8 možností (nemůžeme použít nulu a pětku, která je na čtvrtém místě),
2. cifra: 8 možností (bez první číslice a pětky),
3. cifra: 7 možností (bez první číslice, druhé číslice a pětky),
4. cifra: 1 možnost (pětka),
$\Rightarrow$ celkem $8 \cdot 8 \cdot 7$ možností.
Celkem možností: čísla končící na nulu + čísla končící na pětku $9 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 8 \cdot 7 = 952$.

Př. 4: Urči počet všech sudých čtyřciferných čísel s různými ciframi.

Číslo je dělitelné dvěma, právě když končí na 2, 4, 6, 8 nebo 0 $\Rightarrow$ problém: nulu musíme řešit, když zkoumáme číslo na první cifře $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na části.
Číslo končí nulou:
1. cifra: 9 možností (nemůžeme použít nulu, která je na čtvrtém místě),
2. cifra: 8 možností (bez první číslice a nuly),
3. cifra: 7 možností (bez první číslice, druhé číslice a nuly),
4. cifra: 1 možnost (nula),
$\Rightarrow$ celkem $9 \cdot 8 \cdot 7$ možností.
Číslo končí na 2:
1. cifra: 8 možností (nemůžeme použít nulu a dvojku),
2. cifra: 8 možností (bez první číslice a dvojky),
3. cifra: 7 možností (bez první číslice, druhé číslice a dvojky),
4. cifra: 1 možnost (dvojka),
$\Rightarrow$ celkem $8 \cdot 8 \cdot 7$ možností.
Číslo končí na 4, 6, 8:
stejný počet možností jako u dvojky.
Celkem možností: čísla končící na nulu + čísla končící na 2, 4, 6, 8: $9 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2296$.

Př. 5: Z místa A do místa B vedou čtyři turistické trasy, z místa B do místa C tři. Urči, kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že právě jedna ze zmiňovaných sedmi cest bude použita dvakrát (tedy při cestě z A do C i při cestě zpět).

Nakreslíme si obrázek situace:



Způsob, jakým budeme vybírat cesty, je ovlivněn tím, kterou z cest budeme opakovat $\Rightarrow$ řešíme příklad na dvakrát a možnosti pak sečteme (výsledek = počet možností při opakování trasy mezi A a B + počet možností při opakování trasy mezi B a C).

Počet možností pro každou volbu spočítáme tak, že si představíme průchod trasou.

Opakujeme cestu mezi místy A a B:

- Jsme v místě A, volíme cestu do B $\Rightarrow$ 4 možnosti.
- Jsme v B, jdeme do C $\Rightarrow$ další cestu volíme ze 3 možností, kombinujeme s předchozí volbou $\Rightarrow$ $4\cdot 3$ možností pro trasu $A\Rightarrow B\Rightarrow C$.
- Jsme v C, vracíme se do B $\Rightarrow$ máme pouze dvě možnosti (abychom neopakovali cestu z B do C), kombinujeme s předchozími volbami $\Rightarrow$ $4\cdot 3\cdot 2$ možností pro trasu $A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow B$.
- Jsme v B, vracíme se do A $\Rightarrow$ nemáme možnost volby, protože cestu z A do B musíme opakovat $\Rightarrow$ pro cestu $A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow B\Rightarrow A$ máme celkem $4\cdot 3\cdot 2$ možností.

Opakujeme cestu mezi místy B a C:

- Jsme v místě A, volíme cestu do B $\Rightarrow$ 4 možnosti.
- Jsme v B, jdeme do C $\Rightarrow$ další cestu volíme ze 3 možností, kombinujeme s předchozí volbou $\Rightarrow$ $4\cdot 3$ možností pro trasu $A\Rightarrow B\Rightarrow C$.
- Jsme v C, vracíme se do B $\Rightarrow$ máme pouze jednu možnost (musíme opakovat cestu z B do C) $\Rightarrow$ $4\cdot 3$ možností pro trasu $A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow B$.
- Jsme v B, vracíme se do A $\Rightarrow$ máme tři možnosti volby (cestu, kterou jsme šli z A do B, nesmíme opakovat) $\Rightarrow$ pro cestu $A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow B\Rightarrow A$ máme celkem $4\cdot 3\cdot 3$ možností.

Celkový výsledek: $4\cdot 3\cdot 2+4\cdot 3\cdot 3=60$.

Př. 6: Král má osm dcer. Urči, kolika způsoby může vybrat dvě dcery, které chce sníst stohlavý drak (vzhledem k tomu, že drak bude jíst obě princezny najednou, nezáleží na tom, kterou vybereme jako první a kterou jako druhou).

Postupně vybíráme princezny k snídani:
1. výběr: 8 možností
2. výběr: 7 možností
Celkem možností: $8\cdot 7$, ale princezně je asi jedno, jestli ji vybrali jako první nebo jako druhou $\Rightarrow$ nemá cenu rozlišovat výběry typu princezna Anna, princezna Barbora od princezna Barbora, princezna Anna $\Rightarrow$ každou možnost jsme započítali dvakrát $\Rightarrow$ počet možností jak nakrmit draka je poloviční: $\frac{8\cdot 7}{2}=28$.

Př. 7: V rovině je dáno *n* bodů ($n\geq 2$) z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Urči, kolik přímek je určeno těmito body. Odvozený vztah ověř dosazením konkrétního čísla místo *n*.

Přímka je určena dvěma body $\Rightarrow$ budeme hledat, kolika způsoby je možné vybrat dva různé body:

- první bod: n možností,
- druhý bod: $n-1$ možností.

Ke každému bodu, který jsme vybrali jako první, můžeme vystřídat všechny body vybrané jako druhé $\Rightarrow$ celkový počet přímek $n(n-1)$.

Ověříme vztah:
$n=2 \Rightarrow$ jedna přímka, vzorec $n(n-1)=2\cdot 1=2$ - špatně,
$n=3 \Rightarrow$ tři přímky, vzorec $n(n-1)=3\cdot 2=6$ - špatně,
$\Rightarrow$ vzorec je špatně, výsledky jsou dvakrát větší, než by měly být $\Rightarrow$ někde jsme něco zanedbali $\Rightarrow$ projdeme postup a budeme hledat chybu.
Dva body *A* a *B*:
vybíráme první bod $\Rightarrow$ 2 možnosti:

- 1. možnost: vybrali jsme *A* $\Rightarrow$ druhý bod je bod *B* $\Rightarrow$ přímka *AB*
- 2. možnost: vybrali jsme *B* $\Rightarrow$ druhý bod je bod *A* $\Rightarrow$ opět přímka *AB*

$\Rightarrow$ jednu přímku *AB* jsme započítali dvakrát, jednou jako *AB*, podruhé jako *BA* $\Rightarrow$ proto nám všechno vycházelo dvakrát větší $\Rightarrow$ musíme upravit vzorec vydělením 2 (všechny přímky jsme počítali dvakrát),
$\Rightarrow$ body určují $\frac{n(n-1)}{2}$ různých přímek.

Př. 8: Je dán čtverec *ABCD*, na každé z jeho stran je dáno *n* vnitřních bodů. Urči počet trojúhelníků, které mají vrcholy v těchto bodech a na různých stranách čtverce *ABCD*.

Budeme postupně vybírat body na vrcholy trojúhelníka a dáme pozor, kolikrát každý trojúhelník započítáme.
1. vrchol: bod vybíráme libovolně $\Rightarrow$ $4n$ možností,
2. vrchol: vybíráme pouze na stranách čtverce, kde neleží bod vybraný jako první $\Rightarrow$ $3n$ možností,
3. vrchol: vybíráme na zbývajících dvou stranách $\Rightarrow$ $2n$ možností.
Celkový počet: $4n\cdot 3n\cdot 2n=24n^3$ - ještě to není hotové.
Kolikrát jsme započítali trojúhelník *KLM*? (při výběru bodů jsme rozlišovali pořadí bodů, které nemá vliv na to, jaký sestrojíme trojúhelník).
Stejné trojúhelníky: *KLM*, *KML*, *LMK*, *LKM*, *MKL*, *MLK* $\Rightarrow$ každý trojúhelník jsme započítali 6x $\Rightarrow$ nehotový vztah vydělíme 6.
Body na stranách čtverce je dáno $4n^3$ trojúhelníků.

Př. 9: Petáková:
strana 145/cvičení 35

Shrnutí: Pokud není možné určit, kolik možností máme při provedení určitého kroku, musíme řešení rozdělit na více jednoznačných možností.